Задачи для подготовки к экзамену по эконометрике–2

март 2014 г.

Задача 1. Какие из следующих утверждений являются верными?

(a) При помощи GARCH-модели можно устранять гетероскедастичность.

(b) Модель GARCH(1,1) предназначена для прогнозирования меры изменчивости цены финансового инструмента, а не для прогнозирования самой цены инструмента.

(c) Условная дисперсия GARCH-процесса изменяется во времени.

(d) Модель GARCH(1,1) может быть успешно использована для прогнозирования волатильности финансовых инструментов на несколько торговых недель вперед.

(e) GARCH(1,1)-процесс является процессом белого шума, безусловная дисперсия которого изменяется во времени.

Задача 2. При помощи теста отношения правдоподобия исследователь изучает возможность использования GARCH(1,1)-модели вместо модели GARCH(2,2). В этом случае статистика отношения правдоподобия

(a) имеет χ^2-распределение с одной степенью свободы,

(b) имеет χ^2-распределение с двумя степенями свободы,

(c) имеет $F(1,1)$-распределение,

(d) имеет $F(2,2)$-распределение,

(e) не может быть использована.

Задача 3. Найдите безусловную дисперсию следующего GARCH-процесса $\varepsilon_t = \sigma_t \cdot \xi_t$, $\sigma_t^2 = 0.2 + 0.8 \cdot \sigma_{t-1}^2 + 0.1 \cdot \varepsilon_{t-1}^2$.

Задача 4. Безусловная дисперсия следующего GARCH-процесса $\varepsilon_t = \sigma_t \cdot \xi_t$, $\sigma_t^2 = 0.2 + 0.4 \cdot \sigma_{t-1}^2 + 0.3 \cdot \varepsilon_{t-1}^2 + 0.2 \cdot \varepsilon_{t-2}^2$ равна

(a) 2,

(b) 1,

(c) 0.5,

(d) 0.4,

(e) $\sqrt{2}$.

Задача 5. Используя ряд дневных логарифмических доходностей $\{y_t\}_{t=1}^{500}$ некоторого финансового инструмента, были оценены параметры GARCH(1,1)-модели: $\hat{c} = -0.000708$, $\hat{\omega} = 0.000455$, $\hat{\delta} = 0.6424$, $\hat{\gamma} = 0.2509$.

t	$\hat{\sigma}_t^2$	$\hat{\varepsilon}_t^2$
499	0.001904	0.013559
500		0.001833
501		—
502		—

(a) Заполните пропуски в следующей таблице.

(b) Переведите прогнозы дневной волатильности $\hat{\sigma}_{501}$ и $\hat{\sigma}_{502}$ в годовое выражение в процентах.

Задача 6. Рассматривается GARCH(1,1)-процесс $\sigma_t^2 = 1 + 0.8 \cdot \sigma_{t-1}^2 + 0.1 \cdot \varepsilon_{t-1}^2$. Известно, что $\sigma_T^2 = 9$, $\varepsilon_T = -2$. Найдите

(a) $\mathbb{E}[\sigma_{T+1}^2 | \mathcal{F}_T]$,

(b) $\mathbb{E}[\sigma_{T+2}^2 | \mathcal{F}_T]$,

(c) $\mathbb{E}[\sigma_{T+3}^2 | \mathcal{F}_T]$.

Задача 7. Пусть $\varepsilon_t = \sigma_t \cdot \xi_t$, $\sigma_t^2 = \omega + \delta \cdot \sigma_{t-1}^2 + \gamma \cdot \varepsilon_{t-1}^2$ — стандартный GARCH-процесс. Найдите

(a) $\mathbb{E}[\xi_t]$,

(b) $\mathbb{E}[\xi_t^2]$,

(c) $\mathrm{D}[\xi_t]$,

(d) $\mathbb{E}[\xi_t \xi_{t-1}]$,

(e) $\mathrm{cov}(\xi_t, \xi_{t-1})$,

(f) $\mathbb{E}[\xi_t^2 \xi_{t-1}^2]$,

(g) $\mathrm{cov}(\xi_t^2, \xi_{t-1}^2)$,

(h) $\mathrm{P}(\{\xi_t > 0\})$,

(i) $\mathrm{P}(\{-1 < \xi_t < 1\})$,

(j) $\mathbb{E}[\varepsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}]$,

(k) $\mathbb{E}[\varepsilon_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}]$,

(l) $\mathbb{E}[\sigma_t | \mathcal{F}_{t-1}]$,

(m) $\mathrm{D}[\varepsilon_t]$,

(n) $\mathrm{D}[\varepsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}]$,

(o) $\lim_{h \to \infty} \mathbb{E}[\sigma_{T+h}^2 | \mathcal{F}_T]$.

Задача 8. Для стандартного GARCH(1,1)-процесса $\varepsilon_t = \sigma_t \cdot \xi_t$, $\sigma_t^2 = \omega + \delta \cdot \sigma_{t-1}^2 + \gamma \cdot \varepsilon_{t-1}^2$ математическое ожидание $\mathbb{E}[\mathbb{E}[\varepsilon_t^2|\mathcal{F}_{t-2}]]$ равно

(a) σ_{t-2}^2,

(b) ε_t^2,

(c) $\sigma_t^2\mathbb{E}[\xi_t^2|\mathcal{F}_{t-2}]$,

(d) $\sigma_{t-2}^2\mathbb{E}[\xi_t^2|\mathcal{F}_{t-2}]$,

(e) $\frac{\omega}{1-\delta-\gamma}$.

Задача 9. Рассматривается GARCH(1,1)-процесс $\varepsilon_t = \sigma_t \cdot \xi_t$, $\sigma_t^2 = 0.1 + 0.6 \cdot \sigma_{t-1}^2 + 0.3 \cdot \varepsilon_{t-1}^2$. Известно, что $\sigma_T = 1$, $\varepsilon_T = 1$. Тогда

(a) $\mathbb{E}[\sigma_{T+2}^2|\mathcal{F}_T] = 0.1 + 0.6 \cdot \sigma_{T+1}^2 + 0.3 \cdot \varepsilon_{T+1}^2$,

(b) $\mathbb{E}[\sigma_{T+2}^2|\mathcal{F}_T] = 0.1 + 0.6 \cdot \mathbb{E}[\sigma_{T+1}^2|\mathcal{F}_T] + 0.3 \cdot \mathbb{E}[\varepsilon_{T+1}^2|\mathcal{F}_T]$,

(c) $\mathbb{E}[\sigma_{T+2}^2|\mathcal{F}_T] = 0.1 + 0.9 \cdot \mathbb{E}[\sigma_{T+1}^2|\mathcal{F}_T]$,

(d) $\mathbb{E}[\sigma_{T+2}^2|\mathcal{F}_T] = 0.1 + 0.9 \cdot \mathbb{E}[\varepsilon_{T+1}^2|\mathcal{F}_T]$,

(e) $\mathbb{E}[\sigma_{T+2}^2|\mathcal{F}_T] = 0.1 + 0.9 \cdot (0.1 + 0.6 \cdot \sigma_T^2 + 0.3 \cdot \varepsilon_T^2)$.

Задача 10. Рассматривается модель $Y_t = c + \beta \cdot t + \varepsilon_t$, $\varepsilon_t = \sigma_t \cdot \xi_t$, $\sigma_t^2 = \omega + \delta \cdot \sigma_{t-1}^2 + \gamma \cdot \varepsilon_{t-1}^2$. Относительно GARCH-части процесса выдвигаются стандартные предположения. В этом случае логарифмическая функция правдоподобия равна

(a) $l = \sum_{t=1}^T(\ln(2\pi) + \ln(\sigma_t^2) - \frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2})$, где $\sigma_0 = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^T (y_t-\bar{y})^2}{T-1}}$, $\varepsilon_0 = 0$, $\varepsilon_t = y_t - c - \beta \cdot t$, $\sigma_t^2 = \omega + \delta \cdot \sigma_{t-1}^2 + \gamma \cdot \varepsilon_{t-1}^2$ при $t \geq 1$.

(b) $l = \sum_{t=1}^T(\ln(2\pi) + \ln(\sigma_t^2) - \frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2})$, где $\sigma_0 = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^T (y_t-\bar{y})^2}{T-1}}$, $\varepsilon_0 = 0$, $\varepsilon_t = y_t - c$, $\sigma_t^2 = \omega + \delta \cdot \sigma_{t-1}^2 + \gamma \cdot \varepsilon_{t-1}^2$ при $t \geq 1$.

(c) $l = -\frac{1}{2}\sum_{t=1}^T(\ln(2\pi) + \ln(\sigma_t^2) + \frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2})$, где $\sigma_0 = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^T (y_t-\bar{y})^2}{T-1}}$, $\varepsilon_0 = 0$, $\varepsilon_t = y_t - c - \beta \cdot t$, $\sigma_t^2 = \omega + \delta \cdot \sigma_{t-1}^2 + \gamma \cdot \varepsilon_{t-1}^2$ при $t \geq 1$.

(d) $l = -\frac{1}{2}\sum_{t=1}^T(\ln(2\pi) + \ln(\sigma_t^2) + \frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2})$, где $\sigma_0 = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^T (y_t-\bar{y})^2}{T-1}}$, $\varepsilon_0 = 0$, $\varepsilon_t = y_t - c$, $\sigma_t^2 = \omega + \delta \cdot \sigma_{t-1}^2 + \gamma \cdot \varepsilon_{t-1}^2$ при $t \geq 1$.

(e) $l = -0.5\sum_{t=1}^T(\ln(2\pi) - \ln(\sigma_t^2) + \frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2})$, где $\sigma_0 = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^T (y_t-\bar{y})^2}{T-1}}$, $\varepsilon_0 = 0$, $\varepsilon_t = y_t - c - \beta \cdot t$, $\sigma_t^2 = \omega + \delta \cdot \sigma_{t-1}^2 + \gamma \cdot \varepsilon_{t-1}^2$ при $t \geq 1$.