



ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Лекции по эконометрике-2

Введение в пространственную эконометрику

Вакуленко Е.С.

Старший преподаватель кафедры математической
экономики и эконометрики

План лекции

- Идея и применение
- Пространственные эффекты и пространственная зависимость
- Пространственные веса
- Пространственные статистики
- Пространственные регрессионные модели
- Методы оценивания, интерпретация
- Примеры российских исследований
- Компьютерный софт

Что нового?

- Фокус на пространственную корреляцию между ошибками наблюдений (пространственная автокорреляция)
- Спецификация пространственного эффекта в эконометрических моделях
- Оценивание моделей с пространственными эффектами
- Тестирование наличие пространственных эффектов

Где используется?

- Региональные науки (единица наблюдения задана в пространстве – регионы, города и т.д.)
- Социальные науки (индивидуальные данные о взаимодействиях в социальных сетях)

Пространственные эффекты

- Anselin (1988)
- Пространственная зависимость -> пространственная эконометрика
- Пространственная гетерогенность -> стандартные эконометрические методы

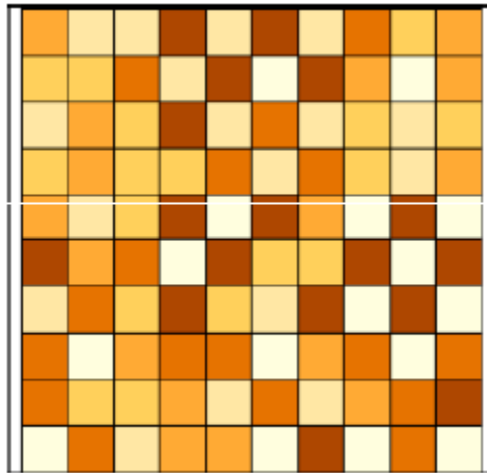
Пространственная зависимость

- Anselin and Bera (1998)

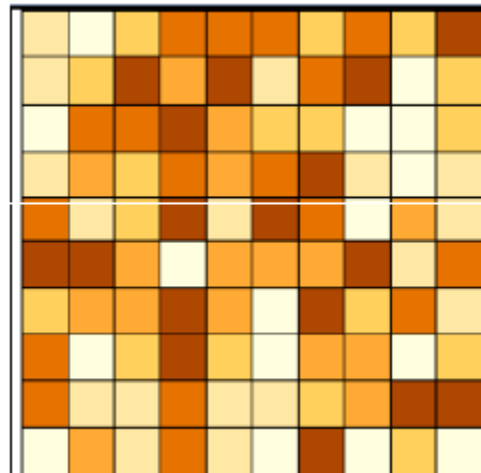
$$\text{cov}[y_i, y_j] = E[y_i y_j] - E[y_i] \cdot E[y_j] \neq 0, \text{ for } i \neq j$$

- Положительная пространственная автокорреляция: образование кластеров в пространстве наблюдений с близкими показателями
- Отрицательная пространственная автокорреляция: рядом группируются единицы обладающие непохожими характеристиками

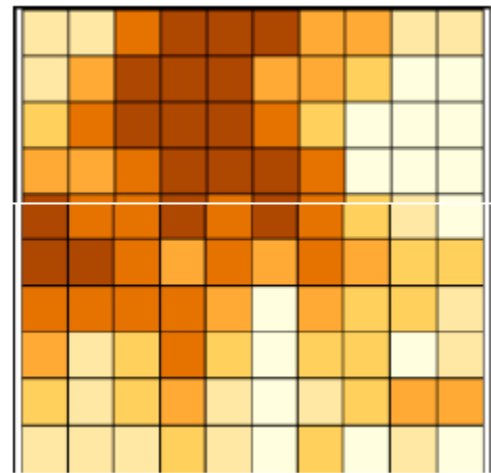
Иллюстрация пространственной корреляции



Отрицательная



Случайная

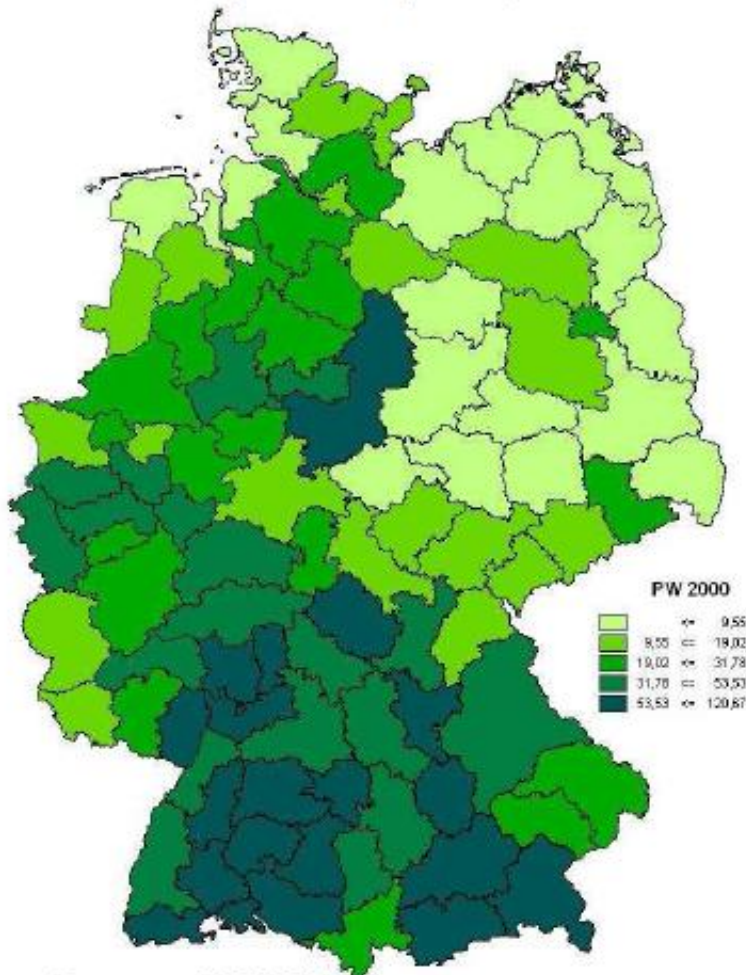


Положительная

Положительная автокорреляция

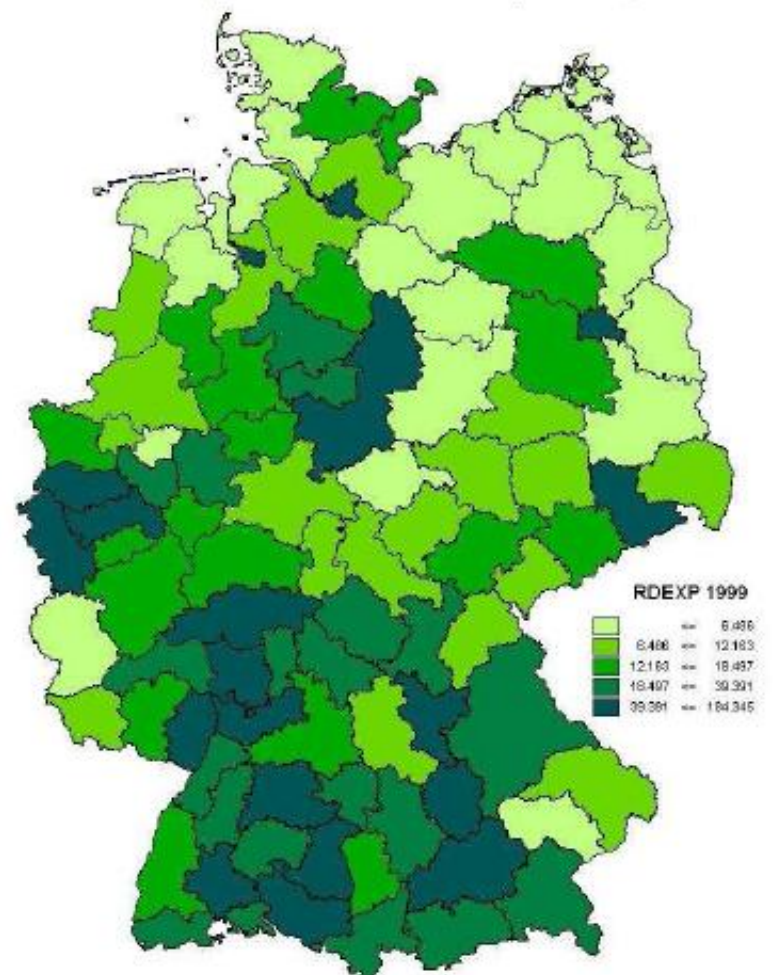
- Кластеризация
- Схожесть соседей
- Совместима с диффузией

Patents per capita, 2000



Patents per 100.000 inhabitants,
Source: Deutscher Patentatlas, own calculations

R&D expenditure p. c., 1999



R&D expenditure (in 1,000 €) per 100.000 inhabitants
Source: Stifterverband Wissenschaftsstatistik, own calculations

Отрицательная пространственная автокорреляция

- Процессы противоположные кластеризации (checkerboard pattern)
- Соседи непохожи друг на друга
- Совместимы с конкуренцией

Причины пространственной зависимости

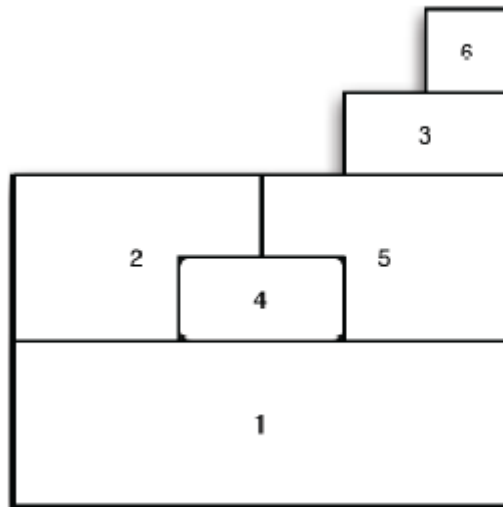
- Пространственная гетерогенность
- Пространственные кластеры факторов влияния
- Пропущенные переменные
- Феномены пространственного взаимодействия (диффузия, эффекты перетока)

Пространственные веса

$$W = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} & \dots & W_{1N} \\ W_{21} & W_{22} & \dots & W_{2N} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ W_{N1} & W_{N2} & \dots & W_{NN} \end{bmatrix}$$

- Географические веса:
 - Общая граница, длина общей границы
 - Расстояние
 - Время (travel time)
- Социально-экономические веса (количество членов в социальной сети и т.д.)
- Экономические веса (торговля, технологические расстояния и т.д.)

Пример матрицы весов



$$W = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Стандартизация матрицы весов по строке

$$W^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Примеры весов на основе расстояний

Distance-Based Weights – distance decay functions

- Negative exponential function (half-life distance)

$$w_{ij} = e^{-\gamma \cdot d_{ij}} \quad (\gamma > 0), \quad d_{half-life} = \ln(2) / \gamma$$

- Inverse distance function

$$w_{ij} = d_{ij}^{-\gamma} \quad (\gamma > 0) \quad w_{ij} = 1 / d_{ij}^2$$

- Gravity like weights

$$w_{ij} = \sqrt{P_i \cdot P_j} / d_{ij}$$

- combined with distance threshold

Пространственный лаг

- Взвешенное среднее

$$[Wy]_i = w_{i1}y_1 + w_{i2}y_2 + \dots + w_{iN}y_N = \sum_{j=1}^N w_{ij} \cdot y_j$$

TIME . $y_t = \alpha + \rho y_{t-1} + u_t$

SPACE: $y_i = \alpha + \rho \sum_{j=1}^N w_{ij} y_j + \varepsilon_i$

Пространственные статистики

Moran's I

$$I = \frac{N}{\sum_i \sum_j w_{ij}} \frac{\sum_i \sum_j w_{ij} (X_i - \bar{X})(X_j - \bar{X})}{\sum_i (X_i - \bar{X})^2}$$

$$z_I = \frac{(I - E[I])}{SD[I]}$$

z-value [$\sim N(0,1)$]

$$E(I) = \frac{-1}{N-1}$$

$$Var(I) = \frac{NS_4 - S_3S_5}{(N-1)(N-2)(N-3)(\sum_i \sum_j w_{ij})^2}$$

where

$$S_1 = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j (w_{ij} + w_{ji})^2$$

$$S_2 = \frac{\sum_i (\sum_j w_{ij} + \sum_j w_{ji})^2}{1}$$

$$S_3 = \frac{N^{-1} \sum_i (x_i - \bar{x})^4}{(N^{-1} \sum_i (x_i - \bar{x})^2)^2}$$

$$S_4 = \frac{(N^2 - 3N + 3)S_1 - NS_2 + 3(\sum_i \sum_j w_{ij})^2}{1}$$

$$S_5 = S_1 - 2NS_1 + \frac{6(\sum_i \sum_j w_{ij})^2}{1}$$

Проверка пространственной автокорреляции

- H_0 : пространственная автокорреляция равна нулю
- H_1 : пространственная автокорреляция не равна нулю.
- Рассчитывается Z статистика
- Если мы отвергаем нулевую гипотезу, $p\text{-value} < 0.05$, то $Z > 0$ говорит о положительной пространственной автокорреляции, $Z < 0$ об отрицательной.

Диаграмма Морана

$$I = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_{ij} (x_i - \bar{x})(x_j - \bar{x})}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} = \frac{[X'WX]}{X'X} = X'(X'X)^{-1}WX$$

I – это угол наклона в регрессии: $WX = c + IX + \varepsilon$

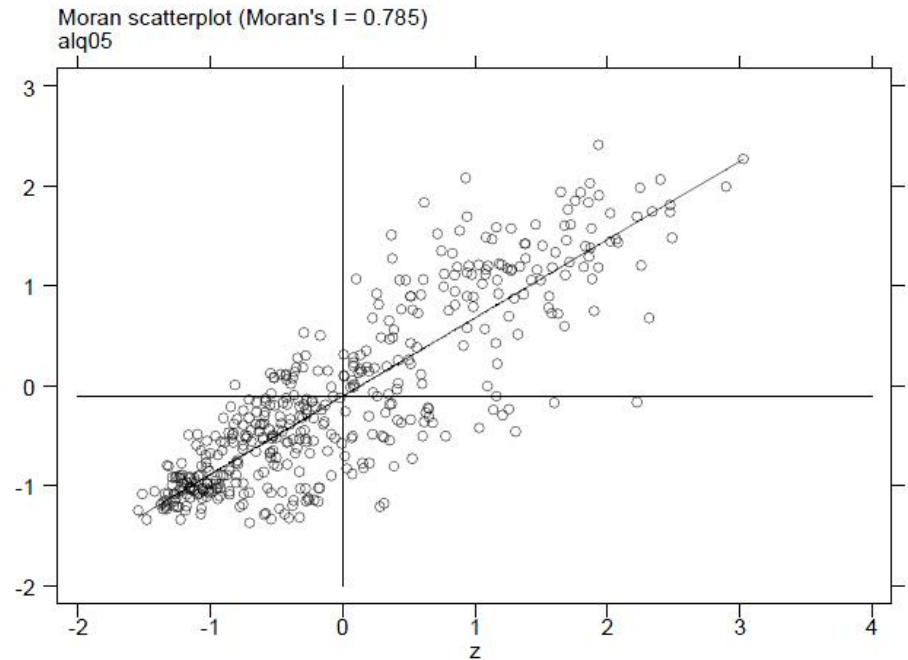
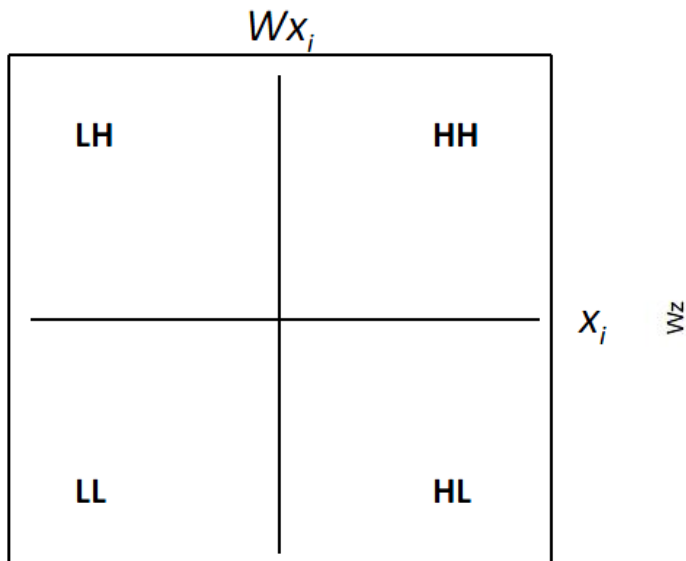
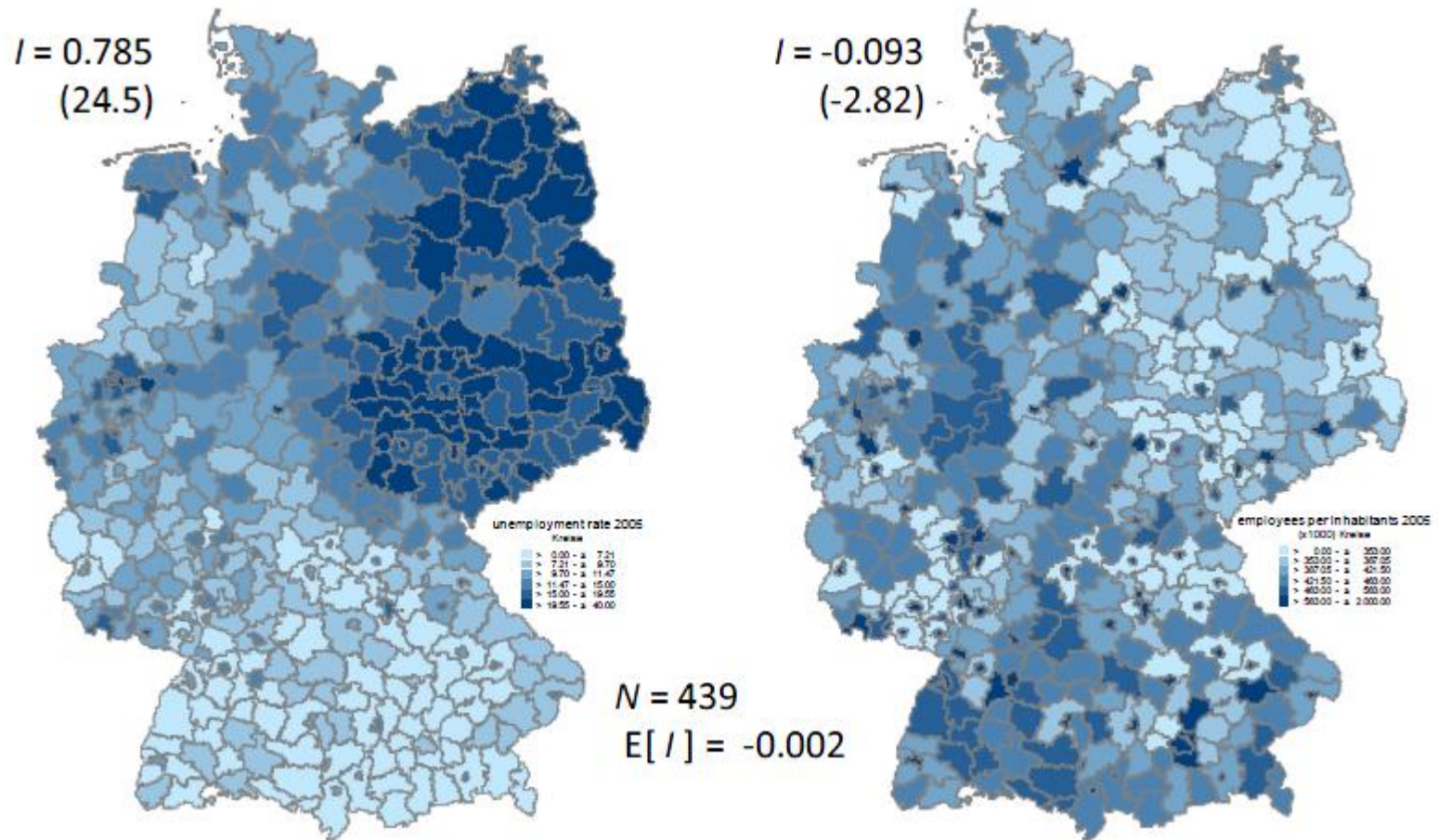


Иллюстрация статистики Морана



Пространственные регрессионные модели

- **SAR** Модель с пространственным авторегрессионным лагом

$$y_i = \rho \sum_{j=1}^N w_{ij} y_j + x_i \beta + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$$

- **SEM** Модель с пространственным взаимодействием в ошибках

$$y = x\beta + \varepsilon, \quad \varepsilon = \lambda W\varepsilon + u, \quad u \sim N(0, \sigma^2 I_N)$$

$$E[\varepsilon\varepsilon'] = \Sigma = \sigma^2 (I_N - \lambda W)^{-1} (I_N - \lambda W')^{-1} \neq \sigma^2 I_N$$

Проблемы неучёта пространственного лага

Возникает смещение МНК оценок!

$$y = \rho W y + x\beta + \varepsilon \Rightarrow (I_N - \rho W)y = x\beta + \varepsilon$$

Пространственный
фильтр

$$\begin{aligned}\hat{\beta} &= (X'X)^{-1} X'(I_N - \hat{\rho}W)y = (X'X)^{-1} X'y - \hat{\rho}(X'X)^{-1} X'W y \\ &= \hat{\beta}_{OLS} - \hat{\rho}(X'X)^{-1} X'W y\end{aligned}$$

$$\hat{\beta}_{OLS} = \hat{\beta} + \hat{\rho}(X'X)^{-1} X'W y$$

Модель SAR

Wy – эндогенная переменная!

$$y = (I_N - \rho W)^{-1} x\beta + (I_N - \rho W)^{-1} \varepsilon$$

$$Wy = W(I_N - \rho W)^{-1} x\beta + W(I_N - \rho W)^{-1} \varepsilon$$

$$E[(Wy)' \varepsilon] \neq 0$$

Оценки OLS несостоятельные!

SEM неучёт: проблемы

- Оценки МНК состоятельные, но неэффективные
- МНК стандартные отклонения и t-статистики коэффициентов - смещенные

Методы оценивания

- **Для моделей SAR**

- Проблемы эндогенности регрессора W_u

- Метод максимального правдоподобия (ML), метод инструментальных переменных (IV)

- **Для моделей SEM**

- Особый случай несферичной ковариационной матрицы ошибок

- Метод максимального правдоподобия (ML), обобщенный метод моментов (GMM)

Другие регрессионные модели

- Модели с пространственными лагами объясняющих переменных (экстерналии, переток)

$$y = x\beta + Wx\gamma + \varepsilon$$

- Пространственная модель Дарбина

$$y = \lambda Wy + x\beta + Wx\gamma + \varepsilon$$

- Модели более высоко порядка лага

$$y = \rho_1 W_1 y + \rho_2 W_2 y + x\beta + \varepsilon, \quad \text{with } W_1 \neq W_2$$

Диагностика пространственных моделей

- Качество подгонки и сравнение моделей
 - Нельзя использовать R^2
 - Log-likelihood
 - Информационные критерии (AIC и BIC)
 - Квадрат корреляции между наблюдаемыми и предсказанными по модели значениями
- Пространственная корреляция в остатках регрессии (статистика Морана, картинки)
- Значимость пространственного лага
- Поиск верной спецификации (проверка гипотез – тесты Вальда, LR, LM)

Интерпретация моделей

- Пространственный мультипликатор

$$y = \rho W y + X\beta + \varepsilon \Rightarrow y - \rho W y = X\beta + \varepsilon \Rightarrow (I_N - \rho W)y = X\beta + \varepsilon$$

$$y = (I_N - \rho W)^{-1} X\beta + (I_N - \rho W)^{-1} \varepsilon$$

- Предельные эффекты:
- Обычная модель $\frac{\partial y}{\partial X} = \beta$
- Пространственный лаг $\frac{\partial y}{\partial X} = (I_N - \rho W)^{-1} \beta$
- Предельный эффект в моделях с пространственным лагом больше! Эффект мультипликатора

Пространственные модели на панельных данных

- Сквозная регрессия с пространственными эффектами

$$y = \rho(I_T \otimes W_N)y + X\beta + \varepsilon$$

- Модель с детерминированными индивидуальными эффектами

$$y = \rho(I_T \otimes W_N)y + (I_T \otimes \alpha) + X\beta + \varepsilon$$

- Модель со случайными индивидуальными эффектами (SAR и SEM) $\varepsilon_{it} = \mu_i + v_{it}$ ($\varepsilon_{it} = \mu_i + \theta_t + v_{it}$)

- Методы оценивания: ML, GMM, IV

Компьютерный софт

- R
- GeoDa
- Pysal (Python Spatial Analysis Library)
- Stata
- Matlab

Примеры исследований в России

- Модели конвергенции российских регионов
 - Коломак Е., Иванова В., Михайлова Т., Ощепков А. и др., Вакуленко Е., лаборатория теории рынков и пространственной экономики (Тисс Ж.)
- Молодежная безработица
 - Демидова О.А. и др.
- Миграция
 - Вакуленко Е.

Литература

Prof. Annekatrien Niebuhr, course “Spatial Econometrics” (Kiel University, Germany)

- L. Anselin: Spatial econometrics: methods and models, 1988 Dordrecht [u.a.], Kluwer.
- J. P. LeSage, R. K. Pace: Introduction to spatial econometrics, 2009 Boca Raton, Fla. [u.a.], CRC Press.
- Fischer, M.; Getis, A. (eds.), Handbook of Applied Spatial Analysis, 2009, Berlin: Springer.
- L. Anselin, A. Bera: Spatial dependence in linear regression models with an introduction to spatial econometrics, in: A. Ullah, D.E. Giles (eds.), Handbook of Applied Economic Statistics, 1998, New York, M. Dekker, pp. 237-289.



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Спасибо за внимание!

evakulenko@hse.ru